12. Ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων

Υπάρχουν διαφόρων ειδών ολοκληρώματα διανυσμάτων, ανάλογα με τη μορφή που έχει η ολοκληρωτέα ποσότητα, και το είδος της περιοχής στην οποία εκτείνεται η ολοκλήρωση. Συγκεκριμένα αναφέρουμε τα:

1. *Συνήθη ολοκληρώματα διανυσμάτων*, στα οποία η υπό ολοκλήρωση διανυσματική συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή.
2. *Επικαμπύλια ολοκληρώματα*, στα οποία η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μιας καμπύλης, γενικά στο χώρο.
3. *Επιφανειακά ολοκληρώματα*, στα οποία η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε μια επιφάνεια.
4. *Ολοκληρώματα χώρου ή όγκου*, στα οποία η ολοκλήρωση γίνεται μέσα σε μια κλειστή περιοχή.

Εδώ θα αναφερθούμε στα δύο πρώτα είδη μόνο.

12.1 Απλό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής

Αν $\vec{\mathbf{R}}(t) = R_x(t)\,\hat{\mathbf{x}} + R_y(t)\,\hat{\mathbf{y}} + R_z(t)\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση της μεταβλητής t, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int \vec{\mathbf{R}}(t)\,dt \equiv \hat{\mathbf{x}} \int R_x(t)\,dt + \hat{\mathbf{y}} \int R_y(t)\,dt + \hat{\mathbf{z}} \int R_z(t)\,dt \tag{12.1}$$

είναι το *αόριστο ολοκλήρωμα* του $\vec{\mathbf{R}}(t)$ ως προς t.

Αν υπάρχει μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{\mathbf{P}}(t)$ τέτοια ώστε $\dfrac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{R}}$, τότε

$$\int \vec{\mathbf{R}}(t)\,dt = \int \frac{d\vec{\mathbf{P}}(t)}{dt}dt = \vec{\mathbf{P}}(t) + \vec{\mathbf{c}} \tag{12.2}$$

όπου η $\vec{\mathbf{c}}$ είναι μια αυθαίρετη διανυσματική σταθερά ολοκλήρωσης.

Ως *ορισμένο ολοκλήρωμα* του $\vec{\mathbf{R}}(t)$ ως προς t μεταξύ των ορίων $t = a$ και $t = b$ ορίζεται το

$$\int_a^b \vec{\mathbf{R}}(t)\,dt = \int_a^b \frac{d\vec{\mathbf{P}}(t)}{dt}dt = \left[\vec{\mathbf{P}}(t) + \vec{\mathbf{c}}\right]_a^b = \vec{\mathbf{P}}(b) - \vec{\mathbf{P}}(a)\ . \tag{12.3}$$

Ολοκληρώματα αυτού του είδους, αναλύονται σε ένα απλό ολοκλήρωμα για την κάθε συνιστώσα.

Παράδειγμα 1

Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t και στις κατάλληλες μονάδες, ως:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = 12\cos 2t\,\hat{\mathbf{x}} - 8\sin 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 16t\,\hat{\mathbf{z}}\ .$$

Να βρεθεί η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}(t)$ και η θέση $\vec{\mathbf{r}}(t)$ του σωματιδίου, αν αρχικά ($t = 0$) είναι: $\vec{\mathbf{v}}(0) = 0$ και $\vec{\mathbf{r}}(0) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι $\quad \vec{\mathbf{a}}(t) = \dfrac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \quad$ και $\quad \vec{\mathbf{v}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$.

Ολοκληρώνοντας την επιτάχυνση ως προς το χρόνο, έχουμε:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \int \vec{\mathbf{a}}(t)\,dt = \int \left(12\cos 2t\,\hat{\mathbf{x}} - 8\sin 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 16t\,\hat{\mathbf{z}}\right)dt = 12\hat{\mathbf{x}}\int \cos 2t\,dt - 8\hat{\mathbf{y}}\int \sin 2t\,dt + 16\hat{\mathbf{z}}\int t\,dt$$

και $$\vec{\mathbf{v}}(t) = 6\sin 2t\,\hat{\mathbf{x}} + 4\cos 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 8t^2\,\hat{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{c}}_1\ .$$

Για $t=0$, $\mathbf{0} = 0\,\hat{\mathbf{x}} + 4\,\hat{\mathbf{y}} + 0\,\hat{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{c}}_1$, $\vec{\mathbf{c}}_1 = -4\,\hat{\mathbf{y}}$

και επομένως, $\vec{\mathbf{v}}(t) = 6\sin 2t\,\hat{\mathbf{x}} + 4(\cos 2t - 1)\,\hat{\mathbf{y}} + 8t^2\,\hat{\mathbf{z}}$.

Ολοκληρώνοντας, $\vec{\mathbf{r}}(t) = \int \vec{\mathbf{v}}(t)\,dt = 6\hat{\mathbf{x}}\int \sin 2t\,dt + 4\hat{\mathbf{y}}\int (\cos 2t - 1)\,dt + 8\hat{\mathbf{z}}\int t^2 dt$

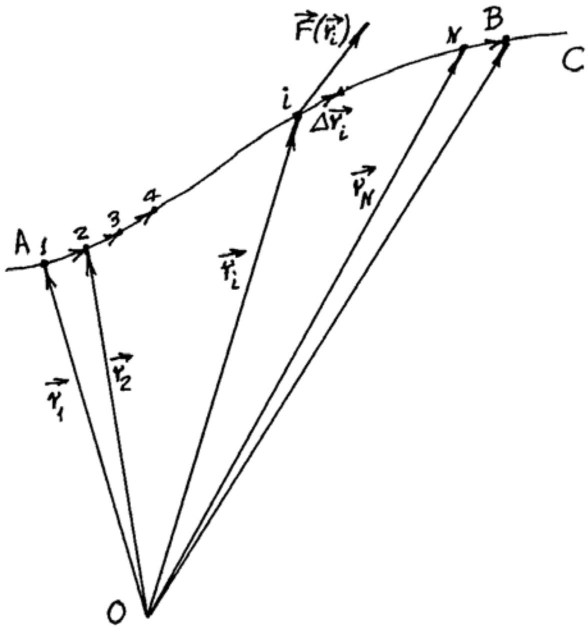
και $\vec{\mathbf{r}}(t) = -3\cos 2t\,\hat{\mathbf{x}} + 2(\sin 2t - 2t)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{8}{3}t^3\,\hat{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{c}}_2$.

Για $t=0$, $\mathbf{0} = -3\,\hat{\mathbf{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} + 0\,\hat{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{c}}_2$, $\vec{\mathbf{c}}_2 = 3\,\hat{\mathbf{x}}$

και επομένως, $\vec{\mathbf{r}}(t) = 3(1-\cos 2t)\,\hat{\mathbf{x}} + 2(\sin 2t - 2t)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{8}{3}t^3\,\hat{\mathbf{z}}$.

12.2 Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Έστω δύο σημεία, *A* και *B*, στο χώρο, και μία συνεχής καμπύλη *C* που τα ενώνει. Έστω επίσης ότι σε κάθε σημείο του χώρου ένα σημειακό σώμα υφίσταται μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ η οποία, γενικά, είναι συνάρτηση της θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ του σώματος. Αν το σώμα μετακινηθεί κατά μετατόπιση $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, από το σημείο $\vec{\mathbf{r}}$ στο σημείο $\vec{\mathbf{r}}+\Delta\vec{\mathbf{r}}$, η δύναμη παράγει έργο ίσο με $\Delta W \approx \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}$, όπου η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο μικρότερη είναι η μετατόπιση, δεδομένου ότι η δύναμη μεταβάλλεται με τη θέση.



Κατά τη μετατόπιση του σώματος από το σημείο *A* στο σημείο *B* κατά μήκος της καμπύλης *C*, η δύναμη παράγει έργο W, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Διαιρούμε την καμπύλη σε *N* ευθύγραμμα τμήματα $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$ το καθένα από τα οποία συνδέει το σημείο $\vec{\mathbf{r}}_i$ με το σημείο $\vec{\mathbf{r}}_i + \Delta\vec{\mathbf{r}}_i$. Το σημείο *A* βρίσκεται στη θέση $\vec{\mathbf{r}}_A = \vec{\mathbf{r}}_1$, και το σημείο *B* στη θέση $\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_{N+1}$. Το άθροισμα όλων των στοιχειωδών ποσοτήτων έργου είναι ίσο με

$$W \approx \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_1)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_2)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + ... + \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_i + ... + \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_N)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_i \qquad (12.4)$$

Στο όριο, καθώς $N\to\infty$ και $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i \to \mathbf{0}$, έχουμε $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_i \to \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot d\vec{\mathbf{r}}$ και το άθροισμα μετατρέπεται στο ορισμένο ολοκλήρωμα $\sum_{i=1}^{N} \to \int_A^B$ του $dW = \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}$, μεταξύ των σημείων *A* και *B*, κατά μήκος της καμπύλης *C*. Συμβολικά γράφουμε:

$$W = \lim_{\substack{\Delta\vec{\mathbf{r}}\to\mathbf{0}\\ N\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i = \lim_{\substack{\Delta\vec{\mathbf{r}}\to\mathbf{0}\\ N\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_i = \int_A^B dW = \int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}_B} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}\,. \qquad (12.5)$$

Το ολοκλήρωμα $\int_C \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}$ *ονομάζεται γραμμικό ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης* $\vec{\mathbf{F}}$ *ως προς* $\vec{\mathbf{r}}$, *κατά μήκος της καμπύλης C, μεταξύ των σημείων A και B.*

Κάποιος που είναι εξοικειωμένος με το συμβολισμό που μόλις αναπτύξαμε, θα διετύπωνε τον όλο συλλογισμό συνοπτικά ως εξής:

« Το έργο που παράγει η δύναμη κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{\mathbf{r}}$ του σώματος είναι ίσο με $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. Όταν το σώμα μετακινηθεί κατά μήκος της καμπύλης C από το σημείο A στο σημείο B, το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$ κατά μήκος της καμπύλης C, μεταξύ των σημείων A και B, $\underset{\text{καμπύλη } C}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. »

12.2.1 Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, $\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}}$ και $d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$. Επομένως, $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, και

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad (12.6)$$

Οι συνιστώσες $F_x,\ F_y,\ F_z$ της $\vec{\mathbf{F}}$ είναι γενικά συναρτήσεις των $x,\ y,\ z$. Αν γνωρίζουμε τις $F_x,\ F_y,\ F_z$ συναρτήσει της θέσης πάνω στην καμπύλη C, τα τρία αυτά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν. Αυτό θα επιδειχθεί με κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = 4\dfrac{y}{x^2}\hat{\mathbf{x}} + xy\,\hat{\mathbf{y}}$ (σε newton όταν τα x και y είναι σε m) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $A(0,0)$ στο σημείο $B(2,8)$, κατά μήκος της παραβολής $y = 2x^2$, πάνω στο επίπεδο xy.

Επιβεβαιώνουμε ότι τα σημεία A και B πράγματι βρίσκονται πάνω στην παραβολή $y = 2x^2$.

Το παραγόμενο έργο είναι ίσο με $W = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C \left(F_x dx + F_y dy\right) = \int_C \left(4\dfrac{y}{x^2}dx + xy\,dy\right)$.

Για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, εκφράζουμε τις υπό ολοκλήρωση ποσότητες συναρτήσει μίας μόνο μεταβλητής. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $y = 2x^2$, που ισχύει πάνω στην καμπύλη ολοκλήρωσης, για να απαλείψουμε το y. Η σχέση δίνει επίσης $dy = 4x\,dx$. Έτσι,

$$W = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_A^B \left(4\frac{y}{x^2}dx + xy\,dy\right) = \int_{x=0}^{x=2} \left(4\frac{2x^2}{x^2}dx + x(2x^2)(4x\,dx)\right) =$$

$$= \int_0^2 \left(8\,dx + 2x^3\,4x\,dx\right) = \int_0^2 \left(8\,dx + 8x^4\,dx\right) = 8\left[x + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 8\left(2 + \frac{2^5}{5} - 0\right) = \frac{336}{5} \text{ joule.}$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = (3x^2 + 6y)\,\hat{\mathbf{x}} - 14yz\,\hat{\mathbf{y}} + 20xz^2\,\hat{\mathbf{z}}$ (σε newton όταν τα x, y και z είναι σε m) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $A(0,0,0)$ στο σημείο $B(1,1,1)$. Η διαδρομή είναι η καμπύλη C, η οποία δίνεται στην παραμετρική μορφή: $x = t,\quad y = t^2,\quad z = t^3$.

Επιβεβαιώνουμε ότι τα σημεία A και B πράγματι βρίσκονται πάνω στην καμπύλη C. Το σημείο A αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$ της παραμέτρου, και το B στην τιμή $t = 1$.
Το παραγόμενο έργο είναι ίσο με

$$W = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = \int_C [(3x^2 + 6y)\, dx - 14yz\, dy + 20xz^2 dz] \ .$$

Για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, θα πρέπει να εκφράσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα συναρτήσει μίας μόνο μεταβλητής. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις σχέσεις ανάμεσα στα x, y και z, όπως αυτές ισχύουν πάνω στην καμπύλη της διαδρομής. Επιλέγουμε να εκφράσουμε όλες τις μεταβλητές συναρτήσει του t. Έτσι, είναι

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad \text{καθώς επίσης και} \quad dx = dt, \quad dy = 2t\, dt, \quad dz = 3t^2\, dt$$

Επομένως,

$$W = \int_A^B [(3x^2 + 6y)\, dx - 14yz\, dy + 20xz^2 dz] =$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} [(3t^2 + 6t^2)\, dt - 14t^2 t^3 (2t\, dt) + 20t(t^3)^2 (3t^2 dt)] =$$

$$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\, dt = \left[3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\right]_0^1 = 5 \ \text{joule.}$$

> Υπάρχει ένα σφάλμα που κάνουν καμιά φορά οι σπουδαστές στην πρώτη τους επαφή με την ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, για τον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων. Συγκεκριμένα, στη διαδικασία του υπολογισμού του ολοκληρώματος κάνουν την απλοποίηση $\int x^2 yz\, dz = x^2 y \int z\, dz$, για παράδειγμα, με το σκεπτικό ότι αφού η ολοκλήρωση θα γίνει ως προς z, τα x και y δεν θα επηρεάσουν το ολοκλήρωμα. Αυτός ο συλλογισμός είναι λανθασμένος. Μόνο σταθερές ποσότητες μπορούν να μεταφερθούν έξω από το ολοκλήρωμα. Κατά την ολοκλήρωση ως προς z κατά μήκος μιας γενικής καμπύλης C στο χώρο, τα x και y γενικά δεν παραμένουν σταθερά. Κάτι τέτοιο προφανώς θα συνέβαινε *μόνο* στην ολοκλήρωση κατά μήκος μιας ευθείας κάθετης στο επίπεδο xy. Όλες οι ποσότητες που μεταβάλλονται κατά μήκος της καμπύλης ολοκλήρωσης πρέπει να ληφθούν υπόψη. Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, για να γίνει δυνατή η ολοκλήρωση, πρέπει, σε κάθε ένα από τα ολοκληρώματα, να εκφράσουμε όλες τις μεταβλητές συναρτήσει μιας μόνο μεταβλητής.

Προβλήματα

1 Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = 3xy\,\hat{\mathbf{x}} - 5z\,\hat{\mathbf{y}} + 10x\,\hat{\mathbf{z}}$ (σε newton όταν τα x, y και z είναι σε m) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης C, η οποία δίνεται στην παραμετρική μορφή: $x = t^2 + 1, \quad y = 2t^2, \quad z = t^3$. από το σημείο $A(t=1)$ στο σημείο $B(t=2)$. (Απ.: 303 J)

2 Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = 3xy\,\hat{\mathbf{x}} - y^2\,\hat{\mathbf{y}}$ (σε newton όταν τα x και y είναι σε m) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $A(0, 0)$ στο σημείο $B(1,2)$, κατά μήκος της παραβολής $y = 2x^2$, πάνω στο επίπεδο xy. (Απ.: $-7/6$ J)

3 Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = (3x^2 + 6y)\,\hat{\mathbf{x}} - 14yz\,\hat{\mathbf{y}} + 20xz^2\,\hat{\mathbf{z}}$ (σε newton όταν τα x και y είναι σε m) κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $A(0, 0,0)$ στο σημείο $B(1,1,1)$, κατά μήκος των διαδρομών:

(α) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$. (Απ.: 5 J)

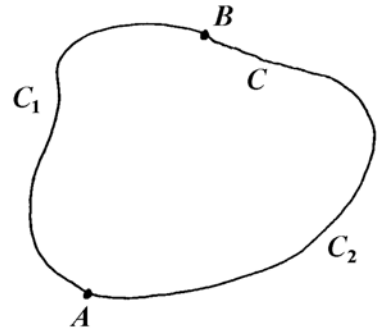
(β) Της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία. (Απ.: $13/3$ J)

12.2.2 Το διατηρητικό πεδίο

Αν σε μια περιοχή το ολοκλήρωμα $\underset{\text{καμπύλη } C}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ εξαρτάται μόνο από το αρχικό σημείο *A* και το τελικό σημείο *B* και είναι ανεξάρτητο της διαδρομής *C*, το διανυσματικό πεδίο $\vec{\mathbf{F}}$ ονομάζεται *διατηρητικό*.

Για δύο διαφορετικές διαδρομές C_1 και C_2 μεταξύ των σημείων *A* και *B*, έχουμε για μια διατηρητική διανυσματική συνάρτηση $\vec{\mathbf{F}}$ την ισότητα:

$$\underset{\text{καμπύλη } C_1}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \underset{\text{καμπύλη } C_2}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad (12.7)$$



Επειδή είναι

$$\underset{\text{καμπύλη } C_2}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\underset{\text{καμπύλη } C_2}{\int_B^A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \ , \qquad (12.8)$$

η Εξ. (12.7) γίνεται

$$\underset{\text{καμπύλη } C_1}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \underset{\text{καμπύλη } C_2}{\int_B^A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0 \ . \qquad (12.9)$$

Αν ονομάσουμε C την κλειστή καμπύλη την οποία αποτελούν η C_1 από το σημείο *A* στο σημείο *B* και η C_2 από το σημείο *B* στο σημείο *A*, η Εξ. (12.9) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0 \ , \qquad (12.10)$$

όπου το σύμβολο $\oint_C$ υποδηλώνει ολοκλήρωση πάνω στην κλειστή διαδρομή C. Επομένως το ολοκλήρωμα της $\vec{\mathbf{F}}$ κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι ίσο με μηδέν. Η ποσότητα $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ ονομάζεται *κυκλοφορία της* $\vec{\mathbf{F}}$ *κατά μήκος της κλειστής καμπύλης* C.

Αν η $\vec{\mathbf{F}}$ είναι μια δύναμη, το ολοκλήρωμα (12.10) είναι το έργο που παράγει η δύναμη όταν μετακινήσει το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της κλειστής διαδρομής C. Το όνομα *διατηρητική δύναμη* οφείλεται στο γεγονός ότι το έργο αυτό είναι ίσο με μηδέν. Ένα σώμα πάνω στο οποίο ασκείται αυτή η δύναμη ούτε κερδίζει ούτε χάνει ενέργεια, συνολικά, εξ αιτίας αυτής της δύναμης, όταν διαγράψει μια κλειστή τροχιά.

Με αναφορά σε μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$, για σαφήνεια, ισχύουν τα εξής:

1. Αν μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ είναι διατηρητική σε μια περιοχή, τότε το ολοκλήρωμα $\underset{\text{καμπύλη } C}{\int_A^B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ έχει την ίδια τιμή για κάθε καμπύλη C στην περιοχή, που ενώνει τα σημεία *A* και *B*.
2. Αν μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ είναι διατηρητική σε μια περιοχή, τότε $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη C στην περιοχή.
3. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ διατηρητική είναι η $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$.
4. Αν μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ είναι διατηρητική, τότε υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση U τέτοια ώστε $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$. Στη Φυσική, η συνάρτηση U ονομάζεται *συνάρτηση δυναμικής ενέργειας* που σχετίζεται με τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$. Το αρνητικό πρόσημο χρησιμοποιείται κατά σύμβαση στη Φυσική.

5. Αν η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ είναι διατηρητική, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(\vec{\mathbf{r}})$ για την οποία είναι $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$, δίνεται από την εξίσωση $U(\vec{\mathbf{r}}) = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, με αβεβαιότητα μιας σταθεράς η οποία εξαρτάται από το σημείο αναφοράς $\vec{\mathbf{r}}_A$ όπου λαμβάνεται $U(\vec{\mathbf{r}}_A) \equiv 0$.
6. Αν είναι $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$, όπου η U είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, τότε η $\vec{\mathbf{F}}$ είναι διατηρητική. Αυτό πηγάζει από τη γενική ταυτότητα $\nabla \times \nabla U \equiv \mathbf{0}$, από την οποία προκύπτει ότι είναι $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$.

Παράδειγμα 4

Να δειχθεί ότι η $\vec{\mathbf{F}} = (2xy + z^3)\,\hat{\mathbf{x}} + x^2\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι διατηρητική. Να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση δυναμικού που αντιστοιχεί στην $\vec{\mathbf{F}}$ είναι η $U(\vec{\mathbf{r}}) = -x^2 y - xz^3$.

Επειδή

$$\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

η δύναμη είναι διατηρητική.

Από το γεγονός ότι, για το U που δίνεται, είναι

$$-\nabla U = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + xz^3)\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + xz^3)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y + xz^3)\,\hat{\mathbf{z}} = (2xy + z^3)\,\hat{\mathbf{x}} + x^2\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{z}} \,,$$

η διανυσματική συνάρτηση $\vec{\mathbf{F}}$ πράγματι προκύπτει από την $U(\vec{\mathbf{r}})$ μέσω της σχέσης $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$.

Παράδειγμα 5

Να αποδειχθεί ότι η δυναμική ενέργεια $U(\vec{\mathbf{r}})$ από την οποία η διατηρητική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ προκύπτει μέσω της σχέσης $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$, δίνεται από την εξίσωση $U(\vec{\mathbf{r}}) = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, με $U(\vec{\mathbf{r}}_A) = 0$.

Αν είναι $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$, τότε $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\nabla U \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy + \dfrac{\partial U}{\partial z}dz \right) = -dU$.

Επομένως, $\int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}} dU = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ $\quad U(\vec{\mathbf{r}}) - U(\vec{\mathbf{r}}_A) = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ $\quad U(\vec{\mathbf{r}}) = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

Προβλήματα

1 Έστω ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $U(x, y, z) = 3xy^2 z^3$. Βρέστε τη δύναμη στην οποία αντιστοιχεί, $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U$, και δείξτε ότι αυτή είναι διατηρητική, υπολογίζοντας το $\nabla \times \vec{\mathbf{F}}$.

2 Αποδείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα $\nabla \times \nabla U \equiv \mathbf{0}$.

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998. Κεφ. 5.

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 6.